

استفاده از روش AVK برای حل معادلات حالت گذرای موتورهای القایی

واژه‌های کلیدی: حل عددی، روش AVK،
معادلات دیفرانسیل غیرخطی متغیر با زمان، حالت گذرا، موتور القایی

چکیده

در این مقاله از یک روش جدید و در عین حال ساده حل معادلات دیفرانسیل غیرخطی متغیر با زمان برای تحلیل حالت گذرای موتورهای القایی تحت بار استفاده شده است. روش AVK یک روش حل عددی بوده که با استفاده از مفاهیم انتگرال ریمانی و مشتق سوئی، حل معادله دیفرانسیل غیرخطی متغیر با زمان را منوط به حل یک مساله بهینه‌سازی خطی یا غیرخطی می‌نماید. دستگاه معادلات مربوط به تحلیل حالت گذرای موتور القایی تحت بار غیرخطی بوده و با در نظر گرفتن اثر غیر همزمانی اتصال کلیدها، این معادلات وابسته به زمان نیز می‌باشند. در این مقاله ابتدا معادلات الکترومکانیکی مربوط به حالت گذرای موتور القایی تحت بار تشریح گردیده، روش AVK معرفی شده و نحوه اعمال این روش برای حل معادلات دیفرانسیل حاصله ارائه می‌گردد. از یک سیستم نمونه برای نشان دادن عملکرد روش ذکر شده استفاده شده است.

مقدمه

معادلات الکترومکانیکی حالت گذرای موتور القایی تحت بار به دلیل ضرب متغیرهای حالت غیرخطی می‌باشند [۱]. بنابراین نیازمند روش‌های عددی برای حل معادلات می‌باشد. اتصال همزمان سه فاز موتور به شبکه حین راه اندازی عملاً امکان پذیر نمی‌باشد. در مرجع [۲] و [۳] نشان داده شده است که اتصال غیرهمزمان کلیدها در رفتار حالت گذرای موتور القایی به شدت تاثیرگذار می‌باشد. لذا برای تحلیل حالت گذرای موتور القایی تحت بار در لحظه استارت، در نظر گرفتن غیرهمزمانی کلیدها اجتناب ناپذیر می‌باشد. در نظر گرفتن این فرض به نوعی دستگاه معادلات توصیف کننده رفتار سیستم را وابسته به زمان (اختلاف زمانی اتصال کلیدها) می‌کند.

روش AVK یک روش حل عددی برای حل معادلات دیفرانسیل غیرخطی متغیر با زمان می‌باشد [۴] و [۵]. این روش با گسسته‌سازی متغیرهای مساله و بکارگیری مفاهیم نرم، انتگرال ریمانی و مشتق سوئی، حل معادله دیفرانسیل

ω_r سرعت روتور، f_r ضریب میرایی روتور و T_s گشتاور شفت است.

برای دیسک رابطه تعادل گشتاور بصورت زیر خواهد بود:

$$T_s = J_d \dot{\omega}_d + f_d \omega_d \quad (2)$$

که در آن J_d ، f_d و ω_d به ترتیب اینرسی، ضریب میرایی و سرعت دیسک هستند. از طرفی اگر σ ضریب سختی روتور، θ_r زاویه روتور و θ_d زاویه دیسک باشند داریم:

$$T_s = \sigma(\theta_r - \theta_d) \quad (3)$$

که رابطه بین سرعت و زاویه دیسک و موتور به صورت زیر است:

$$\dot{\theta}_d = \omega_d, \quad \dot{\theta}_r = \omega_r \quad (4)$$

بنابراین معادلات حالت مکانیکی سیستم به صورت رابطه (5) قابل بازنویسی است.

$$\begin{bmatrix} J_r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & J_d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\omega}_r \\ \dot{\theta}_r \\ \dot{\omega}_d \\ \dot{\theta}_d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_r & \sigma & 0 & -\sigma \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sigma & f_d & \sigma \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_r \\ \theta_r \\ \omega_d \\ \theta_d \end{bmatrix} = T_m \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5)$$

ب- معادلات الکتریکی

با ناچیز فرض کردن اثرات اشباع مغناطیسی، تلفات آهنی و هارمونی‌های mmf روی شکل موج جریان، رفتار الکتریکی موتور القایی به صورت رابطه (6) قابل بیان است [6].

$$\begin{bmatrix} L_s & M_s & M_s & M & -\frac{M}{2} & -\frac{M}{2} \\ M_s & L_s & M_s & -\frac{M}{2} & M & -\frac{M}{2} \\ M_s & M_s & L_s & -\frac{M}{2} & -\frac{M}{2} & M \\ M & -\frac{M}{2} & -\frac{M}{2} & L_r & M_r & M_r \\ -\frac{M}{2} & M & -\frac{M}{2} & M_r & L_r & M_r \\ -\frac{M}{2} & -\frac{M}{2} & M & M_r & M_r & L_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{di_a}{dt} \\ \frac{di_b}{dt} \\ \frac{di_c}{dt} \\ \frac{di_d}{dt} \\ \frac{di_e}{dt} \\ \frac{di_f}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_s & & & & & \\ & R_s & & & & \\ & & R_s & & & \\ 0 & & & G_1 \omega_r & -G_1 \omega_r & R_r \\ 0 & & & -G_1 \omega_r & G_1 \omega_r & -G_2 \omega_r \\ 0 & & & G_1 \omega_r & -G_1 \omega_r & G_2 \omega_r \\ 0 & & & G_1 \omega_r & -G_1 \omega_r & G_2 \omega_r & R_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \\ i_d \\ i_e \\ i_f \end{bmatrix} \quad (6)$$

غیرخطی متغییر با زمان را منوط به حل یک مساله بهینه‌سازی خطی یا غیر خطی، بسته به نوع مساله، می‌نماید. در این مقاله ضمن معرفی روش AVK، چگونگی اعمال آن برای حل دستگاه معادلات مربوط به حالت گذرای موتور القایی تحت بار نشان داده شده است. سادگی و امکان استفاده از حل کننده‌های موجود مسائل غیرخطی از مزایای این روش است. سایر بخش‌های این مقاله به این صورت می‌باشد: در بخش دوم معادلات الکترومکانیکی موتور القایی تحت بار تشریح می‌گردد. در بخش سوم چگونگی اعمال عملکرد غیرهمزمان کلیدها بررسی می‌گردد. معرفی روش AVK و چگونگی استفاده از این روش برای حل معادلات دیفرانسیل حالت گذرای موتور القایی در بخش چهارم بیان می‌گردد. در بخش بعدی نتایج پیاده‌سازی این روش روی یک سیستم نمونه گنجانده شده است و در پایان نتیجه‌گیری و جمع بندی بیان شده است.

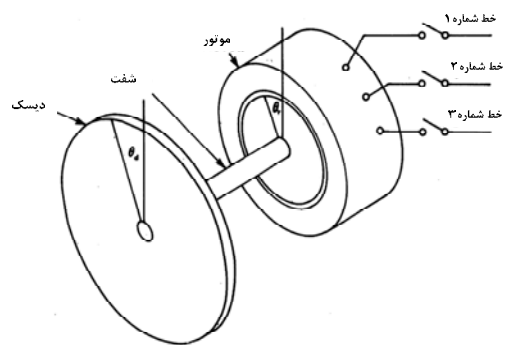
معادلات الکترومکانیکی موتور القایی

شکل (1) سیستم الکترومکانیکی مربوط به یک موتور القایی تحت بار را نشان می‌دهد. معادلات الکتریکی و مکانیکی مربوط به این سیستم در ادامه تشریح می‌گردد.

الف- معادلات مکانیکی

معادلات مربوط به تعادل گشتاور در انتهای روتور به صورت زیر می‌باشد.

$$T_m = J_r \dot{\omega}_r + f_r \omega_r + T_s \quad (1)$$



شکل (1): مدل سیستم الکترو مکانیکی

که در آن T_m گشتاور الکترومغناطیسی، J_r اینرسی روتور،

$$\begin{aligned} i_a + i_b + i_c &= 0 \\ i_d + i_e + i_f &= 0 \end{aligned} \quad (9)$$

به کمک ماتریس تبدیل (۱۱)، معادلات الکتریکی (۶) به چهار معادله بین جریان‌های جدید i_1, i_2, i_3 و ولتاژهای v_1, v_2, v_3 و ۰ کاهش می‌یابد. که v_1 و v_2 ولتاژهای خط می‌باشند.

$$\begin{aligned} v_1 &= v_a - v_c \\ v_2 &= v_b - v_c \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \\ i_d \\ i_e \\ i_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \end{bmatrix} \quad (11)$$

بنابراین معادلات الکتریکی و الکترومکانیکی به صورت زیر

تبدیل خواهد شد.

$$\begin{bmatrix} 2(L_s - M_s) & (L_s - M_s) & 3M & \frac{3M}{2} \\ (L_s - M_s) & 2(L_s - M_s) & \frac{3M}{2} & 3M \\ 3M & \frac{3M}{2} & 2(L_r - M_r) & (L_r - M_r) \\ \frac{3M}{2} & 3M & (L_r - M_r) & 2(L_r - M_r) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{di_1}{dt} \\ \frac{di_2}{dt} \\ \frac{di_3}{dt} \\ \frac{di_4}{dt} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2R_s & R_s \\ R_s & 2R_s \\ 3G_1\omega_r & 2R_r & R_r + 3G_2\omega_r \\ -3G_1\omega_r & R_r - 3G_1\omega_r & 2R_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \end{bmatrix} \quad (12)$$

$$T_m = 3G_1(i_2i_3 - i_1i_4) \quad (13)$$

عملکرد غیرهمزمان کلیدها

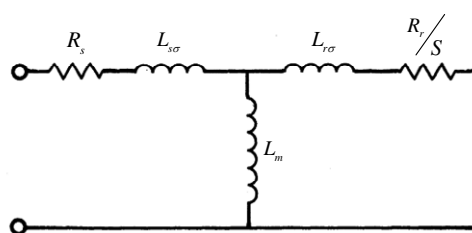
امکان اتصال همزمان خطوط به سه فاز ماشین القایی عملاً ممکن نمی‌باشد. با اتصال اولین کلید، ماشین فقط به شبکه متصل می‌گردد بدون آنکه جریان قابل توجهی بکشد. اتصال دومین کلید یک مدار تکفاز در ماشین ایجاد می‌کند و با

که در آن

$$\begin{aligned} G_1 &= p\sqrt{3}M/2 \\ G_2 &= P(L_r - M_r)/\sqrt{3} \end{aligned}$$

و P تعداد جفت قطب‌های موتور می‌باشد.

اندیس‌های a, b, c بیانگر فازهای استاتور و اندیس‌های d, e, f بیانگر فازهای مدار معادل رتور قفسه سنجابی می‌باشد. پارامترهای رابطه (۶) را می‌توان بر حسب پارامترهای مدار معادل شکل (۲) به صورت زیر بیان نمود.



شکل (۲): مدل معادل موتور القایی

$$\begin{aligned} M &= 2L_m/3 \\ L_s &= L_{s\sigma} + M \\ L_r &= L_{r\sigma} + M \\ M_s &= M_r = -M/2 \end{aligned} \quad (7)$$

که در آن R_s و $L_{s\sigma}$ به ترتیب مقاومت و اندوکتانس پراکنده استاتور و R_r و $L_{r\sigma}$ به ترتیب مقاومت و اندوکتانس پراکنده رتور و s ضریب لغزندگی است. L_m اندوکتانس مغناطیس شونده می‌باشد.

ج- معادلات الکترومکانیکی

معادلات مکانیکی (۵) و معادلات الکتریکی (۶) از طریق رابطه زیر به یکدیگر مربوط می‌گردند.

$$T_m = i^T G i \quad (8)$$

که در آن i بردار جریان و G ضرایب سرعت رتور در ماتریس سمت راست (۶) است.

د- کاهش متغیرها

با فرض اتصال ستاره ایزوله، جریان‌های i_c و i_f با استفاده از روابط زیر قابل حذف می‌باشند.

$$T_m = -3G_1 i_1 i_4 \quad (19)$$

حل معادلات به روش AVK

معادلات دیفرانسیل تعیین کننده رفتار سیستم عبارتند از معادلات مکانیکی (۵)، معادلات الکتریکی (۱۲)، (۱۵) یا (۱۸) و معادلات الکترومکانیکی (۱۳)، (۱۶) یا (۱۹). این معادلات به علت ضرب بین متغیرهای حالت (مانند ضرب جریان در سرعت) در معادلات الکتریکی غیرخطی می‌باشند. از طرفی بررسی تاثیر عملکرد غیرهمزمان کلیدها در رفتار حالت گذرای موتور القایی دستگاه معادلات تعیین کننده رفتار سیستم را وابسته به زمان نیز می‌نماید. لذا استفاده از روش‌های حل عددی اجتناب ناپذیر است.

الف- روش AVK

روش AVK یک روش عددی برای حل معادلات دیفرانسیل غیرخطی وابسته به زمان می‌باشد [۴] و [۵]. معادله دیفرانسیل غیرخطی وابسته به زمان زیر را در نظر بگیرید.

$$\dot{x} + F(x, t) = 0, \quad x(0) = A \quad (20)$$

برای این معادله دیفرانسیل، تابع خطای سراسری را به صورت زیر میتوان تعریف نمود.

$$E(x, t) = \int_0^T \left\| \dot{x} + F(x, t) \right\| dt \quad (21)$$

که E تابع خطای سراسری و یک تابعی است و T طول بازه مورد نظر می‌باشد.

می‌توان ثابت کرد که جواب معادله دیفرانسیل (۲۰) برابر با جواب بهینه مساله بهینه‌سازی زیر است.

$$\begin{aligned} \text{Min. } & E(x, t) \\ \text{s.t. } & x(0) = A \end{aligned} \quad (22)$$

با گسسته‌سازی متغیرهای تصمیم‌گیری در (۲۱) و استفاده از مفهوم انتگرال ریسمانی و مشتق سویی می‌توان مساله بهینه‌سازی غیرخطی (۲۲) را به کمک روش‌های عددی حل نمود.

اتصال سومین کلید، مدار سه فاز تکمیل می‌گردد. در [۱] و [۳] نشان داده شده است که این عملکرد غیرهمزمان کلیدها روی پاسخگویی حالت گذرای موتور القایی به شدت تاثیر می‌گذارد. معادلات (۱۲) و (۱۳) تحت این شرایط می‌بایست اصلاح گردند.

الف- خط ۳ باز باشد

فرض کنید که در شکل (۱) ابتدا فاز "a" به خط ۱ متصل شود. اگر بعد از آن، فاز "b" به خط ۳ متصل شود تحت این شرایط داریم:

$$i_b = -i_a, \quad i_c = 0 \quad (14)$$

بنابراین معادلات (۱۲) و (۱۳) به صورت معادلات (۱۵)

(۱۶) اصلاح می‌گردند.

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} 2(L_s - M_s) & \frac{3M}{2} & -\frac{3M}{2} \\ \frac{3M}{2} & 2(L_r - M_r) & (L_r - M_r) \\ -\frac{3M}{2} & (L_r - M_r) & 2(L_r - M_r) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{di_1}{dt} \\ \frac{di_3}{dt} \\ \frac{di_4}{dt} \end{vmatrix} = \\ & \begin{vmatrix} v_1 & 2R_s \\ 0 & -3G_1\omega_r & 2R_r & R_r + 3G_2\omega_r \\ 0 & -3G_1\omega_r & R_r - 3G_2\omega_r & 2R_r \end{vmatrix} \begin{vmatrix} i_1 \\ i_3 \\ i_4 \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (15)$$

$$T_m = -3G_1 i_1 (i_3 + i_4) \quad (16)$$

ب- خط ۲ باز باشد

به طور مشابه اگر بعد از فاز "a" فاز "c" به ۲ وصل گردد داریم:

$$i_c = -i_a, \quad i_b = 0 \quad (17)$$

و معادلات به شکل (۱۸) و (۱۹) اصلاح می‌گردند.

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} 2(L_s - M_s) & 3M & \frac{3M}{2} \\ 3M & 2(L_r - M_r) & (L_r - M_r) \\ \frac{3M}{2} & (L_r - M_r) & 2(L_r - M_r) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{di_1}{dt} \\ \frac{di_3}{dt} \\ \frac{di_4}{dt} \end{vmatrix} = \\ & \begin{vmatrix} v_2 & 2R_s \\ 0 & -3G_1\omega_r & 2R_r & R_r + 3G_2\omega_r \\ 0 & -3G_1\omega_r & R_r - 3G_2\omega_r & 2R_r \end{vmatrix} \begin{vmatrix} i_1 \\ i_3 \\ i_4 \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (18)$$

$$v_a(j) = \frac{V_m}{\sqrt{3}} \sin[2\pi f(T \frac{j}{N})]$$

$$v_c(j) = \frac{V_m}{\sqrt{3}} \sin[2\pi f(T \frac{j}{N}) - 2\pi / 3] \quad (26)$$

برای سه معادله دیگر الکتریکی نیز به همین ترتیب E_6 ، E_7 و E_8 محاسبه می‌گردد.

بنابراین خطای سراسری کل از رابطه زیر بدست می‌آید.

$$E_t = \sum_{i=1}^8 E_i \quad (27)$$

جدول (۱): مشخصات سیستم مورد مطالعه

۲۰۰	توان نامی (HP)
۵۵۰	ولتاژ خط نامی (V)
۶۰	فرکانس (Hz)
۰/۰۲۸۵	مقاومت اولیه (Ω)
۰/۲۹۱	راکتانس اولیه (mH)
۰/۰۵۴۹	مقاومت ثانویه (Ω)
۰/۲۹۱	راکتانس ثانویه (mH)
۱۰/۶۵۴	راکتانس مغناطیس شونددگی (mH)
۶	تعداد قطب‌ها
۷/۷۳	اینرسی روتور (Kg.m^2)
۲۰	ضریب میرایی روتور (Nm/rad/sec)
۶۸/۷۵	اینرسی دیسک (Kg.m^2)
۲۰	ضریب میرایی روتور (Nm/rad/sec)
۱/۵×۱۰ ^۶	سختی شفت (Nm/rad)

نتایج شبیه‌سازی

به منظور بررسی این روش در حل معادلات حالت گذرای موتور القایی، از نمونه مطالعاتی مرجع [۶] استفاده شده است. اطلاعات مربوطه در جدول (۱) نشان داده شده است.

بازه مورد نظر [۰، ۰/۰۱] در نظر گرفته شده است بنابراین $T = 0.08$ و تعداد تقسیمات برای گسسته‌سازی $N = 100$ لحاظ گردیده است. برای مدل‌سازی عملکرد غیرهمزمان کلیدها فرض شده است که ابتدا خط شماره ۱ به فاز a وصل شده و خط شماره ۳ با اختلاف فاز ۶۰ درجه (معادل ۰/۰۰۳ ثانیه) نسبت به خط ۱ و خط شماره ۲ با اختلاف فاز ۹۰ درجه (معادل ۰/۰۰۴۱۶ ثانیه) نسبت به خط ۱ وصل گردد. بنابراین با توجه به اینکه طول هر گام تقسیم برابر با

ب- اعمال روش AVK برای حل معادلات حالت گذرای موتور القایی

برای حل معادلات توسط روش AVK، برای هر یک از متغیرهای مساله، یک آرایه از متغیرها ($i=1,2,\dots,N$) در نظر گرفته شده است (گسسته‌سازی متغیرهای مساله). سپس برای تک تک معادلات تعیین کننده حالت گذرای موتور که در بخش قبل بیان گردید، بایستی تابع خطای سراسری ($E(x,t)$) را بدست آورد. به عنوان نمونه تابع خطای سراسری مربوط به معادله اول مکانیکی در رابطه (۱) به صورت زیر می‌باشد.

$$E_1 = \frac{T}{2N} \sum_{j=1}^{N-1} [J_r \cdot \frac{N}{T} \cdot (\omega_r(j+1) - \omega_r(j)) - T_m(j) + f_r \cdot \omega_r(j) + \sigma \cdot \theta_r(j) - \sigma \cdot \theta_d(j)]^2$$

$$+ [J_r \cdot \frac{N}{T} \cdot (\omega_r(j) - \omega_r(j-1)) - T_m(j-1) + f_r \cdot \omega_r(j-1) + \sigma \cdot \theta_r(j-1) - \sigma \cdot \theta_d(j-1)]^2 \quad (23)$$

که در آن

$$T_m(j) = T_m(j) = 3G_1(i_2(j)i_3(j) - i_1(j)i_4(j)) \quad (24)$$

برای سه معادله دیگر مکانیکی نیز به همین ترتیب E_2 ، E_3 و E_4 محاسبه می‌گردد. لازم به ذکر است که به منظور حذف قدر مطلق از توان دوم استفاده شده است. این کار در جواب بهینه مساله تغییری ایجاد نمی‌کند و فقط روی مقدار خطای بدست آمده اختلاف خواهد داشت.

به همین ترتیب برای معادلات الکتریکی نیز توابع خطای سراسری بدست می‌آید. به عنوان مثال برای معادله اول الکتریکی در (۱۲) تابع خطا به صورت زیر بدست می‌آید.

$$E_5 = \frac{T}{2N} \sum_{j=1}^{N-1} \left[\sum_{k=1}^4 [H(1,k) \cdot \frac{N}{T} \cdot (i_k(j+1) - i_k(j)) - v_a(j) + v_c(j) + 2R_s i_1(j) + R_s i_2(j)] \right]^2$$

$$+ \left[\sum_{k=1}^4 [H(1,k) \cdot \frac{N}{T} \cdot (i_k(j) - i_k(j-1)) - v_a(j-1) + v_c(j-1) + 2R_s i_1(j-1) + R_s i_2(j-1)] \right]^2 \quad (25)$$

که در آن H ماتریس ضرایب سمت چپ معادله (۱۲) می‌باشد و

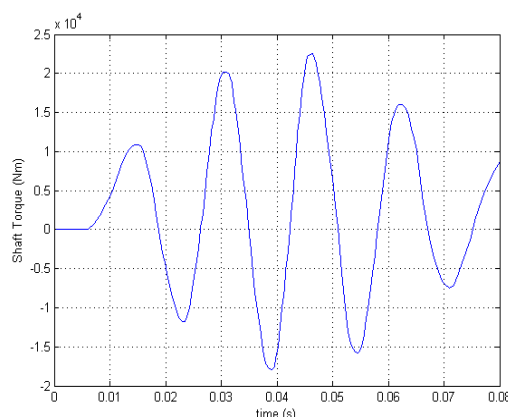
مراجع

- [1] LYON, w. v., "Transient analysis of alternating current machinery", (Wiley, 1954)
- [2] Wood, W. S., Flynn, F. P. and Shanmugasundaram, A., "Transient Torques in Induction Motors due to Switching of the Supply", Proc. IEE, 1965, 112, (7), pp. 1348-1354.
- [3] Enslin, N. C., Kaplan, W. M. and Davies, J. L., "Influences of Transient Switching Currents and Fluxes on the Torque Developed by a Squirrel Cage Induction Motor", Proc. IEE, 1966, 113, (6), pp. 1035-1043.
- [4] k. P. Badakhshan, A. V. Kamyad, A. Azemi, "Using AVK method to solve nonlinear problems with uncertain parameters", Applied Mathematics and Computation, Volume 189, Issue 1, 1 June 2007, Pages 27-34.
- [5] Y. Farzaneh, A. Tootoonchi, "Global Error Minimization method for solving strongly nonlinear oscillator differential equations", Computers & Mathematics with Applications, Volume 58 Issue 11-12, December, 2009.
- [6] b. Ooi, T. H. Barton, "Starting Transients in Induction Motors with Inertia Loads", IEEE Winter Meeting, New York, N.Y., January 30-February 4, 1972.
- [7] GAMS Release, "A user's guid,": GAMS Development Corporation, 1999.

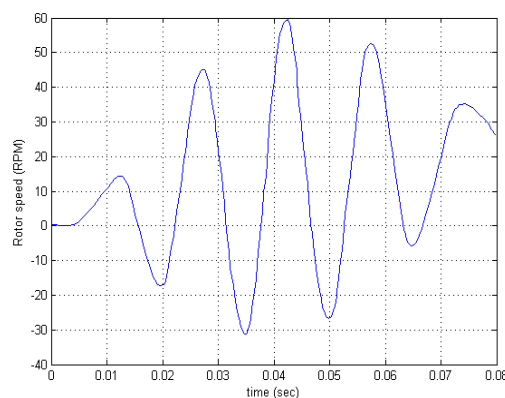
$\frac{T}{N} = 0.0008$ ثانیه می‌باشد، برای $z=1, 2, 3$ از معادلات

(۱۸) و (۱۹) و برای $z=4, 5, \dots, 100$ از معادلات (۱۲) و (۱۳) استفاده شده است.

برای حل مساله مینیمم‌سازی (۲۲) با ۸۰۰ متغیر از نرم افزار GAMS/CONOPT استفاده شده است [۷]. شکل‌های (۳) و (۴) به ترتیب خروجی‌های مربوط به گشتاور شفت و سرعت روتور را نشان می‌دهند.



شکل (۳): گشتاور شفت



شکل (۴): سرعت روتور

نتیجه‌گیری

در این مقاله، یک روش عددی کارآمد برای حل معادلات دیفرانسیل غیرخطی وابسته به زمان مربوط به حالت گذرای موتور القایی تحت بار معرفی گردید. در این روش با استفاده از مفاهیم انتگرال ریمانی و مشتق سوئی، جواب معادله دیفرانسیل با حل یک مساله بهینه‌سازی بدست می‌آید. روش معرفی شده بر روی یک سیستم نمونه مورد آزمایش قرار گرفت.